V. p 進 Teichmüller 理論の紹介

§1. Witt 環と Frobenius

k を 標数 p の体 とする（p は素数)。すると、

$$\Phi_k : k \ni x \mapsto x^p \in k$$

は、掛け算だけでなく、足し算 とも両立する。つまり、体の 準同型 を定義している。この射のことを Frobenius 射 と呼ぶ。Φ_k は必ず 単射 になるが、全射 になるとき、k を 完全体 と呼ぶ。

さて k が 完全体 であると仮定しよう。非負整数 $\mathbb{N}$ を 添え字 とし、k を 成分 とするベクトル＝「Witt ベクトル」

$$(\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ ,\ \lambda_n,\ \ldots)$$

（ただし $\lambda_n \in k$）全体からなる集合 $W(k)$ にある 自然な環構造 を入れることが可能である。環構造の明示的な特定は難しいため、ここでは省略する。このようにして得られた環のことを Witt 環 と呼ぶ。

Witt 環 $W(k)$ の構成は k に関して 関手的 である。つまり、完全体の準同型 $k_1 \to k_2$ に対して対応する Witt 環の準同型

$$W(k_1) \to W(k_2)$$

が引き起こされる。特に、$\Phi_k : k \xrightarrow{\sim} k$ より Witt 環の自己同型

$$\Phi_{W(k)} : W(k) \to W(k)$$

が誘導される。

例 : Witt 環の最も基本的な例は p 進整数環

$$\mathbb{Z}_p \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_n \ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

である。つまり、$\mathbb{Z}_p$ は $W(\mathbb{F}_p)$ に自然に同型である。上の逆極限に登場する $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の各々の部分商たち $p^j\mathbb{Z}/p^{j+1}\mathbb{Z}$ は、「p^j を外す」ことによって $\mathbb{F}_p$ と同一視できる。「このような $\mathbb{F}_p$ たち」は正に Witt ベクトルに出てくる成分たちに対応しているわけだが、

$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の「混標数的な構造」からどのようにして抽出され、「Witt ベクトルの個々の成分」という 分裂された表示 に配置されるか、ということには 深い謎（もしくはロマン？）がある。

$\mathbb{Z}_p$ の例からも推測されるように、k が正標数の体（環）であるにも関わらず、$W(k)$ は 整域 でその商体は 標数 0 の体（＝例えば、$\mathbb{Z}_p$ の場合、p 進数体 $\mathbb{Q}_p$）になる。つまり、Witt 環 $W(k)$ は正標数の体 k に対する、「標数 0 への標準的な持ち上げ」と見ることができる。

「標準的な持ち上げ」は、個々の元に対しても存在する。$\lambda \in k$ に対して、

$$X^p = \Phi_{W(k)}(X)$$

を満たし、かつ 0 次成分が λ になるような元 $\in W(k)$ は、実は 唯一つ存在 する。この元 $[\lambda] \in W(k)$ は λ の Teichmüller 代表元 と呼ばれる。

この Teich 代表元にはもう一つの見方がある。0 次成分が λ になる <u>任意の $\Lambda \in W(k)$</u> に対して

$$\Psi : \Lambda \mapsto \Phi_{W(k)}^{-1}(\Lambda^p)$$

という操作を施すと、同じく 0 次成分が λ になるような $W(k)$ の元ができる。環 $W(k)$ には <u>p 進位相</u> が入っているが、この操作を反復して得られる元たちの極限

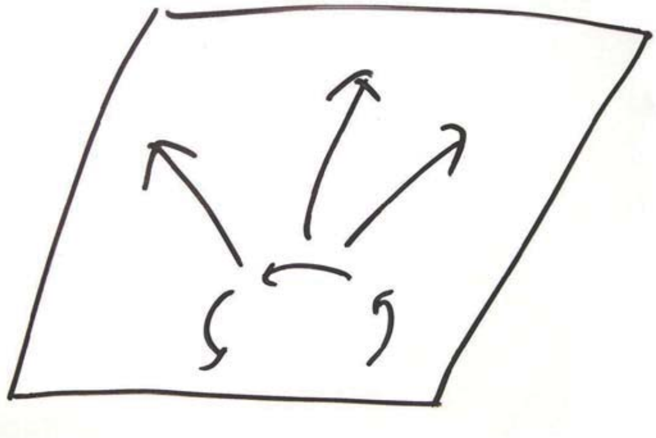
$$\lim_{n\to\infty} \Psi^n(\Lambda)$$

は、Teich 代表元 $[\lambda]$ になる。(<u>証明</u>：
$\Lambda = [\lambda] + p^n \cdot W(k) \implies$
$\Lambda^p = [\lambda^p] + p^{n+1} \cdot W(k)$。)

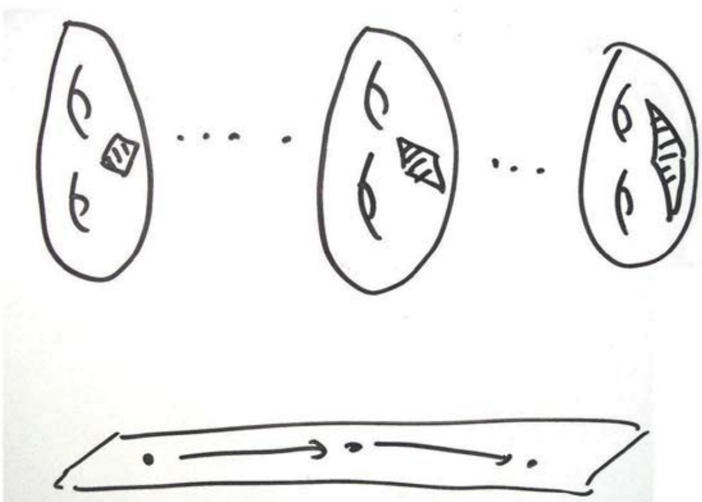
因みに Teich 代表元の「Teichmüller」と、リーマン面の Teich 理論の「Teichmüller」は、(興味深いことに！) <u>同一人物</u> である。

§2. 測地線の幾何と標準的 Frob 持ち上げ

リーマン面の話に戻ろう。上半平面の幾何を代表する現象として「$PSL_2(\mathbb{R})$ の一径数部分群で流す」というものがある。このように「流した」ときの軌道は、「測地線」になる。



一方、リーマン面の正則構造も「一径数族の中で流す」という現象を見た。これはリーマン面の「モジュライ空間」＝「Teich 空間」内の「フロー」＝「測地線の幾何 と見ることができる。



このような「測地線の幾何の p 進版」は、正に§1 の Ψ、即ち「p 乗写像のような写像」である。このような写像のことを

Frobenius 持ち上げ

と呼ぶ。一般の正標数多様体だと Witt 環のような標準的な持ち上げもなければ、Ψ のような標準的 Frobenius 持ち上げもない。

一方、双曲的リーマン面は、例えば射影空間の中に埋め込むことによって代数的な方程式＝多項式で定義されることが分かる。このように双曲的リーマン面に対応するような代数多様体（＝多項式で定義された幾何的対象）を

双曲的代数曲線

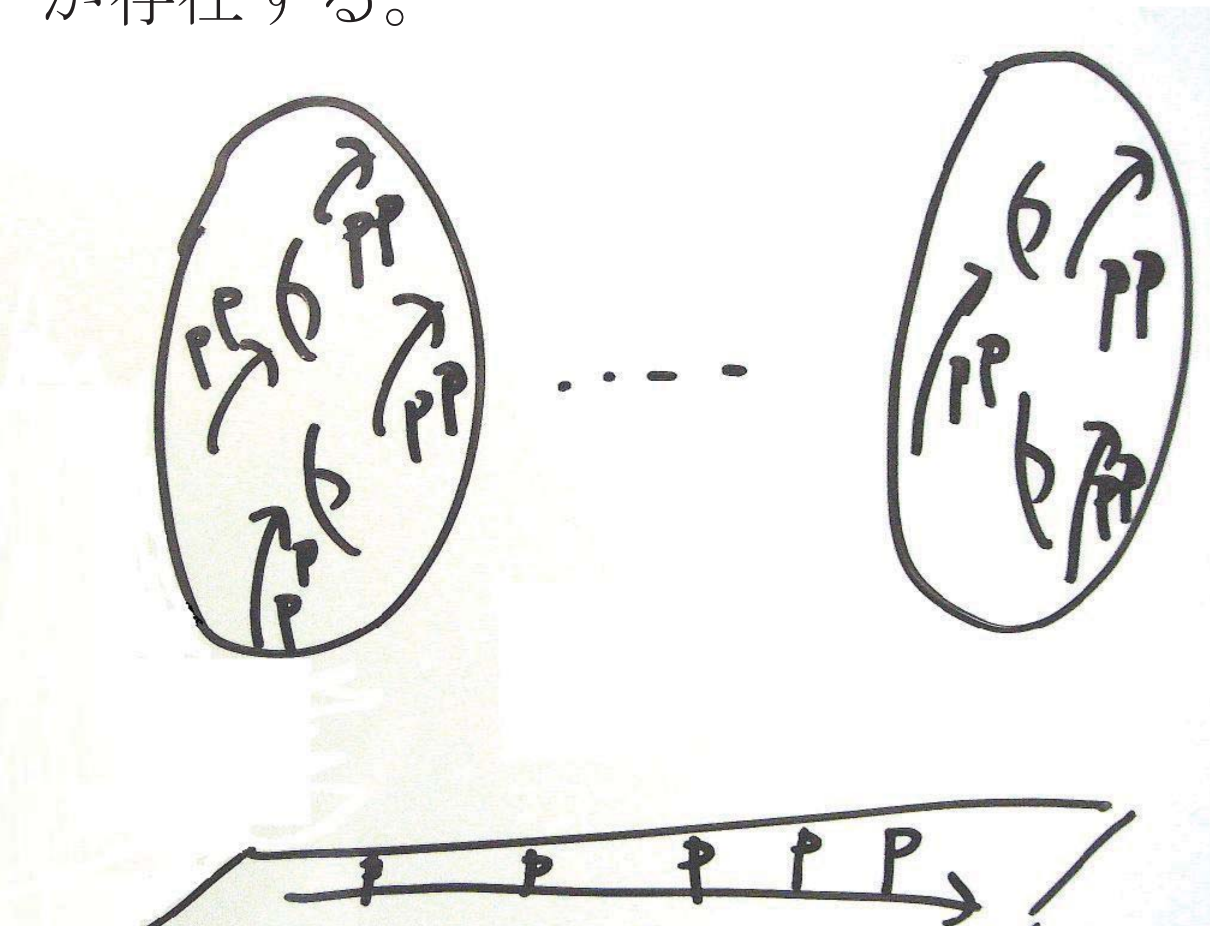
と呼ぶ。双曲的代数曲線は、複素数体のような標数 0 の体だけでなく、正標数の体や Witt 環のような混標数の環の上でも考察することは可能である。

また双曲的代数曲線のモジュライも（高次元）の代数多様体（にちょっとした捻りが付いているもの）を定義している。次の結果は p 進 Teichmüller 理論の基本定理である。

定理：$\mathbb{Z}_p$ 上の双曲的代数曲線のモジュライの $^{\exists}$「被覆」や、その上の普遍的な双曲的代数曲線のある $^{\exists}$「被覆」の上に

標準的な Frobenius 持ち上げ

が存在する。

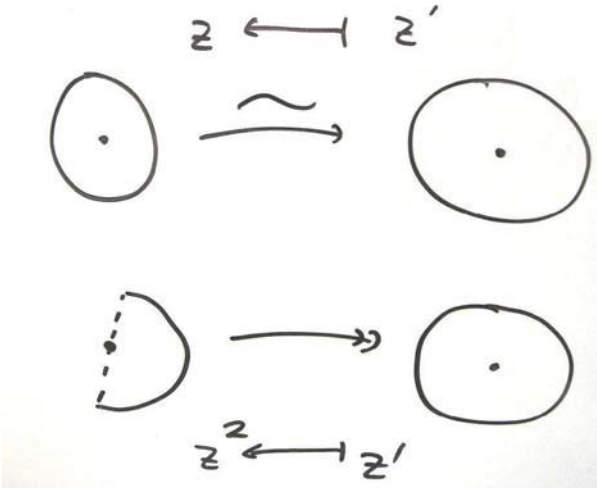


VI. p 進遠アーベル幾何の紹介

§1. 代数曲線の数論的基本群

リーマン面の間の局所的な有限写像について考えよう。このような写像は 局所的な正則関数 や ベキ級数 がどのように写されるかを見ることによって捉えることができる。

$$\mathbb{C}[[z']] \to \mathbb{C}[[z]]$$



特に、「局所的には同型」であるという性質は、

$$z' \mapsto$$

$$f(z) = c_1 \cdot z + c_2 \cdot z^2 + \ldots + c_n \cdot z^n + \ldots$$

$c_1 \neq 0$ かどうかという条件と 同値 である。

このように「局所的同型」という概念をベキ級数をもって定式化すると、<u>任意の体</u> k の上のベキ級数環の間の準同型

$$k[[t']] \to k[[t]]$$

に拡張することができる。このように拡張された「局所的同型」の概念を<u>étale（エタール）</u>と呼ぶ。

k を任意の体とし X を k 上の <u>双曲的代数曲線</u> としよう。X 上の <u>有理関数</u> を考えることによって X の <u>関数体</u>

$$K_X$$

という体が得られる。この体の代数閉包 $\overline{K}_X$ を選ぶと、K_X の <u>絶対ガロア群</u>

$$G_{K_X} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{K}_X/K_X)$$

という <u>副有限群</u> が定まる。$\overline{K}_X$ の中に、k の代数閉包 $\overline{k} \subseteq \overline{K}_X$ が必ず含まれる。

従って k の 絶対ガロア群

$$G_{K_X} \twoheadrightarrow G_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$$

という G_{K_X} の商群も定まる。

X の（閉）点 x に対して K_X を x において「完備化」することによって $k_1[[t]]$（ただし $[k_1 : k] < \infty$）に同型なベキ級数環が定まる。同様なことは（$\overline{K}_X$ 内の）K_X の任意の 有限次拡大$K' \subseteq \overline{K}_X$ にも言える。従ってこのようにして得られる様々な環準同型 $k_1[[t]] \to k_1'[[t]]$ が全て「エタール」であるという条件を課すことによって

$$G_{K_X} \twoheadrightarrow \Pi_X \ (\twoheadrightarrow G_k)$$

という（G_k に全射する）商群が定まる。この副有限群 Π_X を X の「数論的基本群」と呼ぶ。G_k への全射の核をとることによって自然な完全系列

$$1 \to \Delta_X \to \Pi_X \to G_k \to 1$$

が得られる。

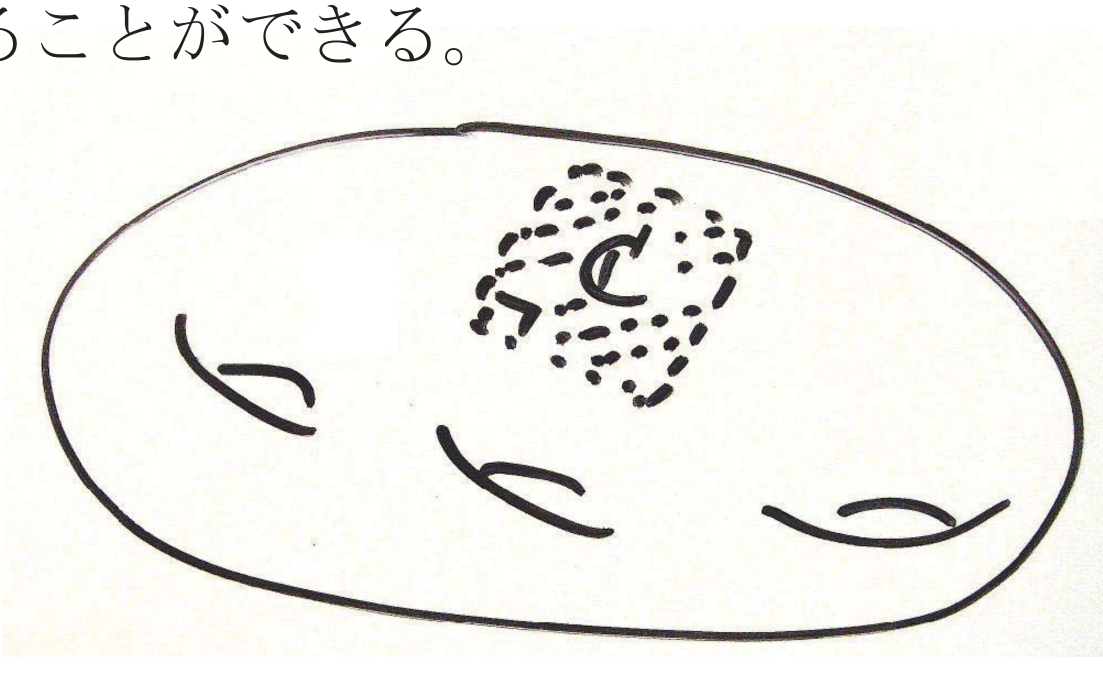
§2. Grothendieck 予想型の定理

先程の完全系列では、Δ_X は

<u>X のモジュライによらない</u>

という重要な性質を満たしている。また $k = \overline{k}$ のとき $\Delta_X = \Pi_X$ となる。例えば、$k = \mathbb{C}$ のとき X は <u>双曲的リーマン面</u> $\mathcal{X}$ に対応していて Π_X は $\mathcal{X}$ の <u>下部位相曲面</u> の「普通の基本群」の <u>副有限完備化</u> に自然に <u>同型</u> になる。

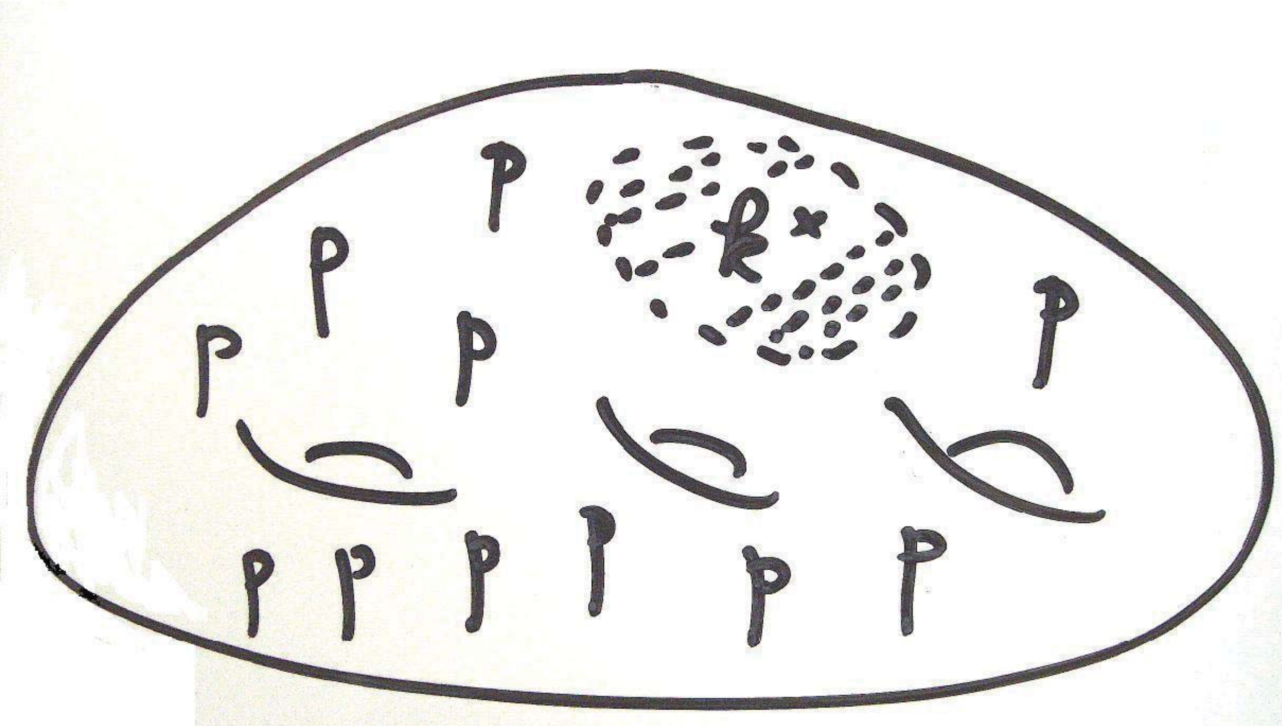
リーマン面の話に戻ろう。「四角の圏」$\mathrm{Squr}(\mathcal{X})$ に登場する四角たちは、「$\mathcal{X}$ の中に埋め込まれた <u>基礎体 $\mathbb{C}$ の小さなコピー</u> ＝代表者」と見ることができる。



次に k が p 進体 $=$ p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大であると仮定しよう。このような体 k の絶対ガロア群 G_k のアーベル化 G_k^{ab} の中に、（局所類体論 により）

$$k^\times \text{ の 小さなコピー}$$

が入っている。しかも X の（k 有理）点 x を選ぶと全射 $\Pi_X \twoheadrightarrow G_k$ のセクション $G_k \to \Pi_X$ が定まり、その像 $G_k \subseteq \Pi_X$ を $\delta \in \Delta_X$ に作用させると、「$G_k \cdot \delta \subseteq \Pi_X$」という「基礎体の小さなコピー」が Π_X の中にできる。Δ_X がリーマン面の下部位相曲面の「p 進版」に当たると考えると、これは先程の $\mathrm{Squr}(\mathcal{X})$ の話の p 進版 と見ることができる。



次の結果はp進遠アーベル幾何 の基本的な定理であるが、$\mathrm{Squr}(\mathcal{X})$ に関する「正則構造復元の定理」のp進版と見ることができる。

定理: X, Y はp進体 k 上の 双曲的代数曲線とする。すると、

$$\left\{ G_k \text{ 上の副有限群の外部同型 } \Pi_X \xrightarrow{\sim} \Pi_Y \right\}$$

と

$$\left\{ k \text{ 上の代数曲線の同型 } X \xrightarrow{\sim} Y \right\}$$

(ただし「外部」とは「内部自己同型との合成を除いて」の意) は1対1に対応している。